线性代数8——特征值与特征向量

参考教材章节

- 5.1 特征向量与特征值
- 5.2 特征方程
- 5.3 对角化
- 5.4 特征向量与线性变换
- 5.6 离散动力系统
- 4.9 马尔可夫链中的应用

课后作业

1. $\begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$是$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$的特征向量吗？如果是，求对应的特征值

2. $\lambda = 4$ 是 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征值吗？如果是，求λ对应的一个特征向量

3. 求所给特征值对应的特征空间的一个基

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = -2$$

4. 求下列矩阵的特征值

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 设$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}, \nu_1 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

   a. 求R^2的一个基，基由ν_1和 A 的另一个特征向量组成.

   b. 证明x_0可以写成$x_0 = \nu_1 + c\nu_2$

   c. 定义$x_k = A^k x_0, k = 1, 2, \cdots$，证明当$k$增大时，$x_k \to \nu_1$

6. 对矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$进行对角化，并且求出$A^8$

7. 证明若A可对角化且可逆，则A^{-1}亦可对角化

8. 构造一个非零的2×2的可逆但不可对角化的矩阵

9. 设$B=\{b_1,b_2,b_3\}$ 是向量空间V的基，$T:v \to R^2$是线性变换.

$$T(x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3)=\begin{bmatrix}2x_1-4x_2+5x_3\\ -x_2+3x_3\end{bmatrix}$$

求 T 相对于B 和 R^2 的标准基的矩阵.

10. 设$A=\begin{bmatrix}0.4 & 0 & 0.2\\ 0.3 & 0.8 & 0.3\\ 0.3 & 0.2 & 0.5\end{bmatrix}$向量$\nu_1=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.6\\ 0.3\end{bmatrix}$是 A 的特征向量,并且其两个特征值是0.5 与 0.2，求动力系统$x_{k+1}=Ax_k$满足$x_0=(0,0.3,0.7)$的解，当$x\to\infty$时，x_k会如何?