微积分8——泰勒公式

泰勒/麦克劳林展开的一般形式

带有皮亚诺余项的泰勒展开

$$f(x)=f(x_0)+f(x_0)'(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$
$$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

带有拉格朗日余项的泰勒展开

$$f(x)=f(x_0)+f(x_0)'(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

带有皮亚诺余项的麦克劳林展开

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林展开

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\theta\in(0,1)$$

常用泰勒展开

$$[1]. \quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad x\in(-1,1)$$

$$[2]. \quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad x\in(-1,1)$$

$$[3]. \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$[4]. \quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$[5]. \quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$[6]. \quad \tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x\in[-1,1]$$

$$[7]. \quad \ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad x\in(-1,1]$$

$$[8]. \quad (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^\alpha x^n \qquad x\in(-1,1),\alpha\in R$$

参考教材章节

- 3.3 泰勒公式

课后作业

1. 求函数$f(x)=\ln x$按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

2. 求函数$f(x)=xe^x$的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式。

3. 求函数$f(x)=\frac{1}{x}$按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式。

4. 利用泰勒公式求下列极限

$$(1).\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}\qquad (2).\ \lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$$