微积分35——含参变量的重积分

含参变量的积分

积分$\int_c^d f(x,y)dy$的值会随着x的改变而改变，因此该积分是一个关于x的函数，即

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy \tag{1}$$

上式中积分限 c 与 d 都是常数，但在实际应用中还会遇到对于参变量 x 的不同的值,积分限也不同的情形,即

$$\Phi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{2}$$

我们称之为函数$f(x,y)$的含参变量的积分。

含参变量积分的性质

性质1: 如果函数 $f(x,y)$ 在矩形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续,那么由积分 (1) 确定的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续。

性质2: 如果函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形 $R=[a,b]\times[c,d]$上连续, 那么由积分 (1) 确定的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微分, 并且

$$\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y.$$

性质3: 如果函数 $f(x,y)$ 在矩形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且

$$c\leqslant\alpha(x)\leqslant d, c\leqslant\beta(x)\leqslant d \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

那么由积分 (2) 确定的函数 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续.

性质4: 如果函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形 $R=[a,b]\times[c,d]$上连续, 函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都在区间 $[a,b]$ 上可微, 且

$$c \leqslant \alpha(x) \leqslant d, c \leqslant \beta(x) \leqslant d \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

那么由积分 $(5-7)$ 确定的函数 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \mathrm{d}y \\ &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) \mathrm{d}y + f[x, \beta(x)]\beta'(x) - f[x, \alpha(x)]\alpha'(x). \end{aligned} \tag{3}$$

公式(3)也叫做莱布尼茨公式。

参考教材章节

- 10.5 含参变量的积分

课后作业

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限:

$$(1). \lim_{x \to 0} \int_x^{1+x} \frac{\mathrm{d}y}{1 + x^2 + y^2}; \qquad (2). \lim_{x \to 0} \int_0^2 y^2 \cos(xy) \mathrm{d}y.$$

2. 设 $F(x) = \int_0^x (x+y) f(y) \mathrm{d}y$, 其中 $f(y)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$.

3. 计算下列积分:

$$(1). \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (2). \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, \mathrm{d}x \quad (0 < a < b).$$