微积分34——重积分的换元法

二重积分的换元法

设$f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续, 若变换

$$T: x = x(u,v), y = y(u,v)$$

将 uOv 平面上的闭区域 D' 变为 xOy 平面上的 D, 且满足

1. $x(u,v), y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数;
2. 在 D' 上雅可比式
3.

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0;$$

3. 变换 $T: D' \to D$ 是一对一的,

则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_{D'} f[x(u,v), y(u,v)]|J(u,v)|\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v.$$

上式就是二重积分的换元公式，该公式可以推广到n重积分的情况。

参考教材章节

- 10.1 二重积分的计算法

课后作业

1. 作适当的变换, 计算下列二重积分:

$\iint_D x^2y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, 其中 D 是由两条双曲线$xy=1$ 和 $xy=2$, 直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第一象限内的闭区域;

2. 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积:

D 是由曲线 $y=x^3, y=4x^3, x=y^3, x=4y^3$ 所围成的第一象限部分的闭区域.

3. 证明如下不等式

$\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u$, 其中闭区域 $D=(x,y)||x|+|y|\leq 1$;