微积分30——拉格朗日乘数法

单个约束下的条件极值

当我们想要计算函数$f(x_1,x_2\cdots x_n)$在超等势面$g(x_1,x_2\cdots x_n)=k$的约束下的极值，则其计算步骤为

1. 解方程组

$$\begin{cases}\nabla f(x_1,x_2\cdots x_n) & =\lambda\nabla g(x_1,x_2\cdots x_n)\\ g(x_1,x_2\cdots x_n) & =k\end{cases}\tag{1}$$

   求出$x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda$.

2. 将求解得到的$x_1,x_2,\cdots,x_n,y,\lambda$代入函数$f(x_1,x_2\cdots x_n)$，比较最大值与最小值。

需要注意的是,**拉格朗日乘数法得到的解并不一定是极值点，判断得到的点是否为极值点需要根据实际情况具体分析**

多个约束下的条件极值

当我们想要计算函数$f(x_1,x_2\cdots x_n)$在超等势面$g_1(x_1,x_2\cdots x_n)=k_1,g_2(x_1,x_2\cdots x_n)=k_2,\cdots g_m(x_1,x_2\cdots x_n)=k_m,(m<n)$的约束下的极值，则其计算步骤为:

1. 解方程组

$$\begin{cases}\nabla f(x_1,x_2\cdots x_n) & =\lambda_1\nabla g_1(x_1,x_2\cdots x_n)+\cdots+\lambda_m\nabla g_m(x_1,x_2\cdots x_n)\\ g_1(x_1,x_2\cdots x_n) & =k_1\\ & \vdots\\ g_m(x_1,x_2\cdots x_n) & =k_m\end{cases}\tag{2}$$

求出$x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots\lambda_m$.

2. 将求解得到的$x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots\lambda_m$代入函数$f(x_1,x_2\cdots x_n)$，比较最大值与最小值。

参考教材章节

- 《Calculus》 14.8 Lagrange Multipliers

课后作业

1. 求函数$f(x,y)=x^2+2y^2$在约束条件$x^2+y^2=1$下的条件极值。

2. 求球面$x^2+y^2+z^2=4$上距离点$P(3,1,-1)$最近和最远的点。

3. 求函数$f(x,y,z)=x+2y+3z$满足如下方程组的约束条件下的极值

$$\begin{cases} x-y+z & =1 \\ x^2+y^2 & =1 \end{cases}$$