微积分28——梯度与方向导数

梯度的几何意义

设三元函数的等势面$F(x,y,z)=k$上有一点$P(x_0,y_0,z_0)$,现有过点P且存在于该等势面上的某曲线C,其方程用向量函数表示为$r(t)=<x(t),y(t),z(t)>$。又设当$t=t_0$时有$r(t_0)=P(x_0,y_0,z_0)$。由于C位于等势面上，故C上的任意一点$(x(t),y(t),z(t))$必定满足等势面方程，即

$$F(x(t),y(t),z(t))=k$$

以上是一个关于t的复合函数，当x,y,z对 t 可导且F对 x,y,z 可微时，可用多元函数复合求导公式得：

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0$$

上式又可以变成点积形式:

$$\nabla F\cdot r'(t)=0$$

当$t=t_0$时，可得

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot r'(t0)=0$$

这说明，等势面F在P点的梯度向量与曲线C在P点的切向量是垂直的；又由于C是过P点的任意曲线。因此不难推知：函数F在P点的梯度向量与该函数在P点任意方向的切向量垂直，即**梯度向量垂直于切平面**，利用空间中平面方程可得切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

函数$z=f(x,y)$既可以看成是一个三维空间中的二元函数，也可以看成是三元函数$F(x,y,z)=z-f(x,y)$在 $k=0$ 时的等势面，在这种情况下，使用上述等势面切平面公式，可得此时$\frac{\partial F}{\partial x}=-f_x(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-f_y(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial z}=1$，故可得

$$-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)+1\cdot(z-z_0)=0$$

这就是过去所推过的二元函数切平面的方程。

参考教材章节

- 《Calculus》 14.6 Directional Derivatives and Gradient Vector

课后作业

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处, 沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

3. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

4. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

5. 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处变化最快的方向, 并求沿这个方向的方向导数.