微积分25——切平面与可微性

切平面的推导

若函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y,z)$处存在偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，则由其偏导数切线确定且包含$z=f(x,y)$上任一经过点$P(x,y,z)$的曲线的切线的平面称为函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y,z)$的切平面。**函数在某点存在切平面，则意味着其在该点处是平滑的,也就是沿任何方向可导。**

设经过点$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

对其进行变形后，可得

$$z-z_0=-\frac{A}{C}(x-x_0)-\frac{B}{C}(y-y_0)$$

当$y=y_0$时候，方程$z-z_0=-\frac{A}{C}(x-x_0)$表示一条经过点$P(x_0,y_0,z_0)$且在$x_Oy$平面上的投影平行于$x$轴的直线，显然这条直线就是由$\frac{\partial z}{\partial x}$确定的切线。因此可知$\frac{z-z_0}{x-x_0}=-\frac{A}{C}=\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x_0,y_0)$。同理，$\frac{z-z_0}{y-y_0}=-\frac{B}{C}=\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x_0,y_0)$。于是过点$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面表达式为：

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

全微分

如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的某领域内有定义，且函数在该点的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

其中 A 与 B 为固定常数， ε_1与 ε_2 为与无穷小量。则称函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微分，而$A\Delta x+B\Delta y$则称为是函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分，记作dz，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y$$

- **可微的必要条件**： 若函数在某点可微，则函数在该点的偏导数必然存在且其全微分可写为$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$
  - **证**： 若函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微分，则有

    $$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

    令$\Delta y=0$，则有

    $$\Delta z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+\varepsilon_1\Delta x$$

    成立，对其两端除以Δx后取极限得

    $$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}A+\varepsilon_1=A$$

    同理可得$f_y(x,y)=B$。于是有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

证毕。

切平面存在与可微分的等价关系

函数在某点的切平面存在与在该点可微分是等价的，即

$$\text{切平面存在}\Leftrightarrow\text{可微分}\overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow}\text{偏导数存在}\overset{\nRightarrow}{\nLeftarrow}\text{连续}\overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow}\text{极限存在}$$

充分性的证明: 若函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微分，则有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

成立，其中

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

恰好是过点(x,y,z)的切平面方程，因此我们可以说在函数可微分的定义中蕴涵了切平面方程，故可微分必切平面存在，并且可以发现由于$\Delta z-dz=\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$,故此可以发现当函数可微分时，可使用切平面方程做出从(x,y)到 $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 的线性近似，效果是极其良好的。

必要性的证明：

当函数$z=f(x,y)$在点(x,y,z)存在切平面时，记切平面在$(x+\Delta x,y+\Delta y)$的对应坐标为$(x+\Delta x,y+\Delta y,\hat{z})$,则此时使用切平面从点从$(x,y)$到 $(x+\Delta x,y+\Delta y)$的线性增量dz和函数全增量Δz分别为

$$dz=\hat{z}-z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y;\qquad \Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

记二者的差值为e，则有

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+e$$

对上式两端同除以$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$后取极限,得

$$\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\frac{f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}+\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\frac{e}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

上式中左边项显然等于函数沿着$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}$方向的导数，由于此时是存在切平面的，故也等于切平面中沿着此方向的切线的斜率。上式中右边第一项则表示从点(x,y,z)到点$(x+\Delta x,y+\Delta y,\hat{z})$的割线斜率，由于该两点均存在于切平面上，因此可得

$$\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\frac{f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

故可推知

$$\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\frac{e}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

即:

$$e=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

故最终可得:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

上式正是函数可微分的严格定义，因此必要性证毕。

函数可微分的充分条件

函数某一点上可微分的充分条件是函数的偏导数在该点是连续的，当偏导数不连续时，则有可能造成在该点不可微的情况出现，例子如下,函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

在$(0,0)$处的偏导数均存在且为0，但不难证明该函数在$(0,0)$点的偏导数是不连续的，此时虽然可以形式的写出其微分$dz=0\Delta x+0\Delta y=0$,但在沿着直线$y=x$趋向于$(0,0)$时，显然$\Delta z-dz=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}\neq o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$,故函数在点$(0,0)$不可微。

充分性的证明： 由假定, 函数的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x,y)$ 的某邻域内存在. 设点 $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为这邻域内任意一点, 考察函数的全增量

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\end{aligned}$$

在第一个方括号内的表达式, 由于 $y+\Delta y$ 不变, 因而可以看做是 x 的一元函数 $f(x,y+\Delta y)$ 的增量. 于是, 应用拉格朗日中值定理, 得到

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x\quad(0<\theta_1<1).$$

又依假设, $f_x(x,y)$ 在点 (x,y) 连续, 所以上式可写为

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=f_x(x,y)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x,$$

其中 ε_1 为 Δx 与 Δy 的函数, 且当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时, $\varepsilon_1\to 0$

同理可证第二个方括号内的表达式可写为

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_2\Delta y,$$

其中 ε_2 为 Δy 的函数, 且当 $\Delta y\to 0$ 时, $\varepsilon_2\to 0.$

由 $(3-4)$、$(3-5)$ 两式可见, 在偏导数连续的假定下, 全增量 Δz 可以表示为

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f,(x,y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y.$$

这就是可微分的严格定义，因此充分性证毕。

参考教材章节

- 《Calculus》 14.4 Tangent Plane and Linear Approximations

课后作业

1. 计算函数$z=e^{xy}$在$x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$时候的全微分

2. 计算$\sqrt{3.02^2+1.97^2+5.99^2}$的近似值

3. 若函数$z=f(x,y)$在点(a,b)处可微分。证明：$z=f(x,y)$在点(a,b)处连续