微积分22——常系数齐次线性微分方程

函数组的线性相关性

设 $y_1(x), y_1(x) \cdots y_n(x)$ 为定义在区间I上的n个函数，如果存在n个不全为零的常数$k_1, k_2 \cdots k_n$,使得当$x \in I$时恒有

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n \equiv 0$$

成立，则称该函数组在区间I上线性相关，否则称为线性无关

线性微分方程解的结构

如果$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$是$n$阶线性齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = 0 \tag{1}$$

的n个线性无关的特解，那么此方程的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

如果$y^*(x)$是n阶非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = f(x) \tag{2}$$

的一个特解，$Y(x)$是 (1) 的通解，则(2)的通解为

$$y = Y(x) + y^*(x) \tag{3}$$

二阶齐次常系数线性微分方程

我们把形如

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$$

的方程称为二阶齐次常系数线性微分方程，其通用解法步骤如下：

1. 写出微分方程的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$
2. 求出特征方程的两个根r_1, r_2
3. 根据r_1, r_2的不同情况，按照下表求其通解

$r^2 + pr + q = 0$的根r_1, r_2	$y'' + py' + qy = 0$通解
$r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$	$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

对于n阶的常系数线性方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

其特征方程为

$$r^n + p_1 r^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0$$

根据特征方程的解，其对应的微分方程的解如下：

特征方程的根	微分方程的对应解
单实根r	给出一项：Ce^{rx}

一对单复根$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	给出两项$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
k重实根r	给出k项 $e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对k重复根	给出$2k$项 $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

课后作业

1. 求下列微分方程的通解

$$
\begin{array}{ll}
(1).\, y''+y'-2y=0 & (2).\, 4\dfrac{d^2x}{dt^2}-20\dfrac{dx}{dt}+25x=0 \\
(3).\, y^{(4)}-y=0 & (4).\, y^{(4)}-2y'''+y''=0
\end{array}
$$