微积分21——可降阶的高阶微分方程

几种常见的可降阶高阶微分方程

1. $y^{(n)}=f(x)$型

对于这种类型，只需对方程两端不断求其积分，每求一次便可使其阶数降低一次

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$$

2. $y''=f(x,y')$型

设$y'=p$,则原方程变为$p'=f(x,p)$，这是一个关于x,p的一阶方程，解其通解为$p=\varphi(x,C_1)$,则$y=\int pdx=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

3. $y''=f(y,y')$

同样进行换元,令$y'=p$，则利用复合函数求导法则，有$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$,这样原方程就变为$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$，这是一个关于$y,p$的一阶方程，解其通解为$y'=p=\varphi(y,C_1)$,进一步对其分离变量两端积分，可得最重结果$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$

参考教材章节

- 7.5 可降阶的高阶微分方程

课后作业

1. 求解下列微分方程的通解

$$(1).\,y'''=xe^x \qquad (2).\,y''=1+y'^2 \qquad (3).\,xy''+y'=0$$

2. 求解下列微分方程满足所给初值条件的特解

$$(1).\,y^3y''+1=0,y|_{x=1}=1,y'|_{x=1}=0 \qquad (2).\,y''=e^{2y},y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$$