微积分20——一阶线性微分方程

一阶线性微分方程

方程

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

称为一阶线性微分方程，如果$Q(x) \equiv 0$，则称该方程是齐次的，否则称为非齐次的。对于齐次方程$\frac{dy}{dx} + P(x) = 0$，对其分离变量后两端积分，得

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + C_1$$

进一步地

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{2}$$

这是(1) 所对应的齐次方程的通解，使用**常数变易法**可以求解出(1)的通解，将(2)中的$C =$换为一个关于x的函数$\mu(x)$，即

$$y = \mu e^{-\int P(x)dx} \tag{3}$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = \mu' e^{-\int P(x)dx} - \mu P(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{4}$$

将(4)代入(1),得

$$\mu' e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \mu' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

两端积分，得

$$\mu = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C \tag{5}$$

将(5)代入(3),即可得到(1)的通解

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

可以发现，非齐次的线性方程组的通解是有其对应的齐次线性方程的通解加上一个特解构成

的。

参考教材章节

- 7.4 一阶线性微分方程

课后作业

1. 求解下列微分方程的通解

$$
\begin{array}{ll}
(1).\ y' + y\cos x = e^{-\sin x} & (2).\ (x^2-1)y' + 2xy - \cos x = 0 \\
(3).\ xy' + y = y(\ln x + \ln y) & (4).\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x-y} - 1
\end{array}
$$

2. 一曲线通过原点，并且在点(x, y)处的切线斜率等于$2x + y$