微积分19——齐次方程

齐次方程

如果一阶微分方程可以化成

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$$

则称这种形式的方程为齐次方程，在齐次方程中，令$\mu=\frac{y}{x}$,则$y=\mu x$, $\frac{dy}{dx}=\mu+x\frac{d\mu}{dx}$,故原方程变为

$$\mu+x\frac{d\mu}{dx}=\varphi(\mu)$$

分离变量后两端积分，得到

$$\int\frac{d\mu}{\varphi(\mu)-\mu}=\int\frac{dx}{x}$$

求出积分后，再用$\frac{y}{x}$代替μ,便可得多给齐次方程的通解。

参考教材章节

- 7.3 齐次方程

课后作业

1. 解微分方程

$$(1).\ x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}\qquad(2).\ (x^2+y^2)dx-xydy=0$$

2. 解微分方程

$$(1).\ (y^2-3x^2)dy+2xydx=0, y|_{x=0}=1;\qquad(2).\ (x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0, y|_{x=1}=1$$

3. 设友连接点$O(0,0)$与 $A(1,1)$的一段向上凸起的曲线 OA，对于 OA 上的任意一点 $P(x,y)$，曲线弧 OP 与直线线段OP所围成的面积为x^2，求曲线弧OA的方程.