微积分15——定积分3:定积分的换元法与分部积分法

定积分的换元法

第一类换元法

$$\text{第一类换元法的一般形式:}\\ \int_a^b f[g(x)]g'(x)dx \overset{令g(x)=\mu}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(\mu)d\mu = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

$$\text{第一类换元法的变体1:}\\ \int_a^{\phi(x)} f[g(t)]g'(t)dt \overset{令g(t)=\mu}{=} \int_{g(a)}^{g[\phi(x)]} f(\mu)d\mu$$

$$\text{第一类换元法的变体2:}\\ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f[g(t)]g'(t)dt \overset{令g(t)=\mu}{=} \int_{g[\phi(x)]}^{g[\psi(x)]} f(\mu)d\mu$$

上述式子成立，是因为：

$$\text{设}F(x) = \int f(x)dx, \text{则}F'(x) = f(x), F'[g(x)] = f[g(x)]g'(x)$$

$$\text{所以,} \int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = F[g(b)] - F[g(a)] = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

第二类换元法

第二类换元法的一般形式：

$$\int_a^b f(x)dx \overset{令x=g(\mu)}{=} \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f[g(\mu)]g'(\mu)d\mu$$

第二类换元法的变体1：

$$\int_a^{\phi(x)} f(t)dt \overset{令t=g(\mu)}{=} \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(\phi(x))} f[g(\mu)]g'(\mu)d\mu$$

第二类换元法的变体2：

$$\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt \overset{令t=g(\mu)}{=} \int_{g^{-1}[\phi(x)]}^{g^{-1}[\psi(x)]} f[g(\mu)]g'(\mu)d\mu$$

上述式子成立，是因为：

设$F(x)=\int f(x)dx$,则$F'(x)=f(x),F'[g(x)]=f[g(x)]g'(x)$

所以，$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f[g(\mu)]g'(\mu)d\mu = F[g[g^{-1}(b)]]-F[g[g^{-1}(a)]]=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$

定积分的分部积分法公式

$$\int_a^b \mu\nu' dx = [\mu\nu]_a^b - \int_a^b \nu\mu' dx$$

参考教材章节

- 5.3 定积分的换元法和分部积分法

课后作业

1. 计算下列定积分

$$(1). \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\cos^3\phi d\phi \qquad (2). \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$$

$$(3). \int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \qquad (4). \int_0^2 \frac{xdx}{x^2-2x+2}$$

2. 设$f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，证明： $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

3. 若$f(t)$是连续的奇函数，证明$\int_0^x f(t)dt$是偶函数；若$f(t)$是连续的偶函数，证明$\int_0^x f(t)dt$是奇函数